ECON 2200, Kjerneregel, annenderivert og elastisitet; Handout

Kjell Arne Brekke

January 27, 2011

1 Inledning

Dette notatet er noen begreper og noen oppgaver som kan hjelpe deg til å forberede deg til forelesningen. Det gjelder det samme som sist uke: Om du **prøver** å regne deg gjennom disse oppgavene vil det være mye lettere å følge med på det som blir gjennomgått på forelesningen. Men ikke bli motløs om du finner det vanskelig, vi skal gå gjennom dette på forelesningen.

2 Litt notasjon

Den deriverte av funksjonen $f(x)$ har vi så langt notert som $f'(x)$. I mange sammenhenger er imidlertid en annen notasjon mer intuitiv, det er Leibnitz sin definisjon $\frac{df(x)}{dx}$. Vi kusker at vi fant den deriverte ved å beregne

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Her kan vi tenke på h som et lite tillegg i argumentet x, og heller skrive det som $\Delta x = h$. På samme måte kan vi tenke på $f(x+h) - f(x)$ som et tilegg Δf (eller også Δy om $y = f(x)$) i funksjonsverdien som et restultat av at vi har endret x. Da kan vi skrive

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ eller } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(Merk at symbolet Δ er den greske bokstaven D). For å markere at vi snakker om grenseverdien når Δx blir veldig liten, så bytter vi ut den greske store D-en med en vanlig liten d, og skriver den deriverte som

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ eller } \frac{dy}{dx} \text{ som altså betyr det samme som } f'(x)$$

Denne notasjonen kalles gjerne Leibnitz-notasjon. (Derivasjon ble utviklet parallelt av Leibnitz og Newton.) Den gjør det lettere å se logikken bak neste derivasjonsregel.

3 Kjerneregelen

Kjerneregelen gjelder for funksjoner som er bygget opp at to funksjoner inni hverandre.

$$f(x) = g(u(x))$$

som vi også kunne skrive ved å innføre en hjelpestørrelse u, der

$$\begin{aligned} f(x) &= g(u) \\ u &= u(x) \end{aligned}$$

Kjerneregelen i Leibniz sin notasjon blir da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Når vi setter den opp slik ser det ut som triviell algebra, at vi kan korte bort du på høyre side. (Det er riktig her, men husk vær forsiktig med å korte på denne måten i andre sammenhenger.) Med Newton sin notasjon blir regelen

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

La oss først prøve å bruke regelen på en konkret funksjon

$$y = f(x) = \left(x^2 + 1\right)^2$$

Her blir

$$\begin{aligned} y &= g(u) = u^2 \\ u &= u(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Da får vi at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

dette kan vi skrive om i notasjonen vi brukte sist uke:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'(x) \\ \frac{dy}{du} &= g'(u) \\ \frac{du}{dx} &= u'(x) \end{aligned}$$

som gir

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

Oppgave 1 *Bruk ligningen ovenfor til å regne ut et uttrykk for $f'(x)$. Merk at i første runde vil du få et svar som inneholder u. Men bruk så at $u = x^2 + 1$ til å komme fram til et uttrykk som bare avhenger av x.*

4 Annenderivert

Dersom

$$f(x) = x^2 + 3x$$

så følger det av de reglene vi har lært at

$$f'(x) = 2x + 3$$

Men dette er igjen en funksjon vi kan derivere, det resultatet kaller vi den andrederiverte

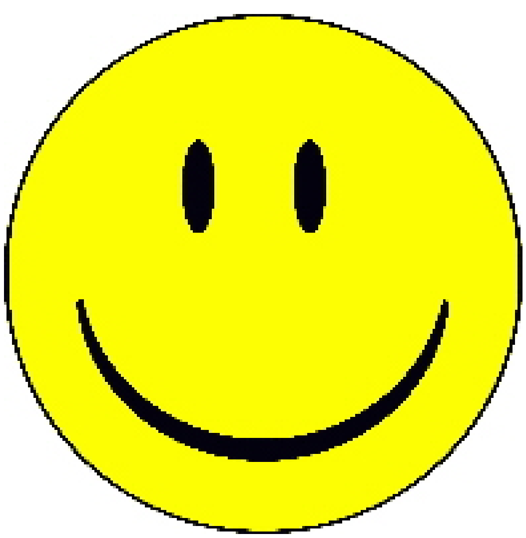
$$f''(x) = 2$$

Den andrederiverte måler hvor fort den deriverte vokser.

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \text{ på } (a,b) \iff f' \text{ er voksende på } (a,b) \Leftrightarrow f \text{ er konveks på } [a,b] \\ f''(x) &\leq 0 \text{ på } (a,b) \iff f' \text{ er avtagende på } (a,b) \Leftrightarrow f \text{ er konkav på } [a,b] \end{aligned}$$

Oppgave 2 *Deriver funksjonen $f(x) = x^3$ to ganger og bruk svaret til å avgjøre om funksjonen er konveks eller konkav på intervallet [1,4]?*

Oppgave 3 *Figuren viser to smiley-fjes. Tenk på munnen som grafen til en funksjon. For hver figur avgjør:*
a) Hvor er stigningstallet størst, venstre eller høyre munnvik? (Husk: Et positivt tall er større enn et negativt.)
b) Bruk svaret i a) til å avgjøre: Hva er fortegnet på den andrederiverte?
b) Er munnen konkav eller konveks?
I resten av oppgaven skal du så sammenligne de to figurene:
c) Hvilken av dem gir et mest positivt inntrykk, og har dette noe sammenheng med den andrederiverte?
d) Hvilken av munn-funksjonene er flat (derivert lik 0) i et topp-punkt?



5 Vekstrater

I mange økonomiske modeller er det særlig interessant å se på den deriverte med hensyn på tiden. Hvor mye forandrer en variabel seg fra ett år til det neste. Det har derfor blitt vanlig å bruke et eget symbol for nettopp denne deriverte. Notasjonen er:

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$$

Om $y = f(t)$ er BNP i år t, så blir $\dot{f}(t)$ tilnermet veksten fra ett år til neste. Ofte er vi mer oppfatt av vekstraten. Den definerer vi som

$$\frac{\dot{f}(t)}{f(t)}$$

Oppgave 4 *BNP i et land er 2500 milliarder. Veksten fra ett år til det neste er 50 milliarder. Hva blir* $\dot{f}(t)$ *(omtrent) og* $\frac{\dot{f}(t)}{f(t)}$. *Hvor stor er veksten i prosent?*

6 Elastisiteter

La $D(p)$ være etterspørselen etter en vare når prisen er p. Det er rimelig å anta at når prisen går opp vil etterspørselen gå ned, da er $D'(p) < 0$. Anta at når prisen på et produkt øker 1 krone faller slaget 100 enheter.

$$D'(p) \approx \frac{D(p+1) - D(p)}{1} = \frac{-100}{1} = -100$$

Er det en stor eller liten reaksjon?

Vi kan tenke oss to tilfeller, **først Steinway konsertflygel**, som det selges 650 av i året, og kan koste over 100 000 kroner, la oss si det koster akkurat 100 000 kroner. Om salget faller med 100 enheter når prisen øker 1 krone, virker det som en urimelig stor eller liten virkning?

Neste eksempel er salget av **teksmeldinger (SMS)**. La oss si de koster 30 øre, og 1 milliard (I 2001 ble det sendt 50 milliarder tekstmeldinger pr mnd på verdensbasis.) Om salget faller med 100 enheter når prisen øker 1 krone, virker det som en urimelig stor eller liten virkning?

Oppgave 5 *For hvert av de to tilfellene ovenfor vurder: Om salget faller med 100 enheter når prisen øker 1 krone, virker det som en urimelig stor eller liten virkning? Gjør så følgende for hvert tilfelle:*
a) Regn ut hvor mange prosent prisen øker
b) Regn ut hvor mange prosent omsetningen faller.
c) Svaret i b) delt på svaret i a) forteller oss hvor mange prosent salget faller når prisen øker med 1%. regn ut denne størrelsen i de to tilfellene.

Som dere kanskje har blitt overbevist om fra eksempelet ovenfor, så er $D'(p)$ lite egnet til å si noe om hvorvidt effekten av en prisendring er stor eller liten. Vi er mer interessert i hvor mange prosent salget endrer seg når vi endrer prisen 1%. Målet vi bruker da er elastisiteten (jeg forklarer hvorfor på forelesningen).

Elastisiteten $El_x f(x)$ til en funksjon $f(x)$ er gitt som

$$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

Oppgave 6 *Bruk formelen til å regne ut elastisiteten til funksjonen $f(x) = x^a$. Om du får et komplisert uttrykk, prøv å forenkle.*

Oppgave 7 *Bruk formelen til å regne ut elastisiteten i eksemplene ovenfor. Merk at du har fått oppgitt alle størrelsene som inngår ($p, D(p)$ og $D'(p)$)*